DISEQUAZIONI ALGEBRICHE

11 novembre 2022

Breve Introduzione Teorica

Dati due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, dove con x si indica la lettera alla quale è assegnato il significato di incognita, tra di loro possono sussistere le relazioni $P(x)<Q(x)$, $P(x)=Q(x)$, $P(x)>Q(x)$. Nel caso della relazione di uguaglianza si parla di equazione, negli altri due casi di disuguaglianza.

In particolare, si dice disequazione ogni disuguaglianza in cui compaiono una o più incognite, nella quale serve ricercare i valori da attribuire alle incognite affinché la disuguaglianza risulti vera.

Si chiama soluzione l'insieme dei valori che si possono attribuire all'incognita tale che soddisfi la disequazione stessa.

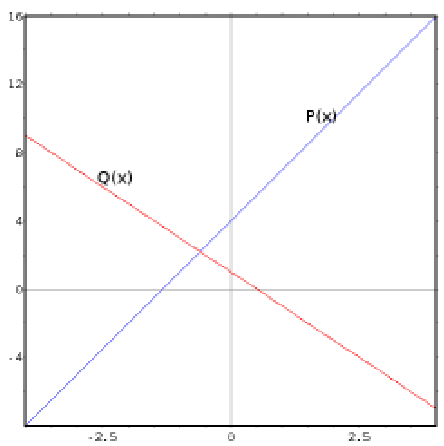
Supponiamo, per semplicità, di avere due polinomi di primo grado, con $x\in\mathbb{R}$, e di volerli confrontare:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x+4 \\ Q(x) &= -2x+1 \end{aligned}$$

Proviamo a sostituire all'incognita x alcuni valori e calcoliamo $P(x)$ e $Q(x)$

x	$P(x)$	$Q(x)$
-4	$3\cdot(-4)+4=-8$	$-2\cdot(-4)+1=9$
-3	$3\cdot(-3)+4=-5$	$-2\cdot(-3)+1=7$
-2	$3\cdot(-2)+4=-2$	$-2\cdot(-2)+1=5$
-1	$3\cdot(-1)+4=1$	$-2\cdot(-1)+1=3$
0	$3\cdot(0)+4=4$	$-2\cdot(0)+1=1$
1	$3\cdot(1)+4=7$	$-2\cdot(1)+1=-1$
2	$3\cdot(2)+4=10$	$-2\cdot(2)+1=-3$
3	$3\cdot(3)+4=13$	$-2\cdot(3)+1=-5$
4	$3\cdot(4)+4=16$	$-2\cdot(4)+1=-7$

Si può osservare che i valori di $P(x)$ risultano minori di quelli di $Q(x)$ almeno fino a $x\leq 1$per poi divenire successivamente maggiori. Ciò indica come tali relazioni tra polinomi siano verificate da più valori, cioè da intervalli di valori, sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali. Per estendere tale ragionamento, possiamo servirci del piano cartesiano e rappresentare i valori ricavati nella tabella sopra:



Si può osservare come la figura riproduca quanto in precedenza affermato in quanto esiste un punto per il quale i due polinomi risultano uguali ($x=x_0$) e due intervalli nei quali i due polinomi sono uno maggiore o minore dell'altro. In particolare per $x<x_0$ si ha $Q(x)>P(x)$ e per $x>x_0$ si ha $Q(x)<P(x)$. Come trovare ora questo valore x_0 senza dover procedere per tentativi? Le modalità risolutive sono le stesse utilizzate nella risoluzione di una equazione, perché il valore

$x = x_0$ è proprio quello per il quale i due polinomi risultano uguali. Valgono pertanto i seguenti principi e le seguenti definizioni:

Due disequazioni aventi gli stessi membri ma che differiscono per il senso ($>$ o $\geq$ in un caso e $<$ e $\leq$ nell'altro) si dicono di verso opposto.

Due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni.

Per le disequazioni valgono le seguenti proprietà, utili per la loro risoluzione (si noti la modifica al secondo principio, rispetto a quello per le equazioni, poiché si deve tenere conto del confronto tra numeri positivi e negativi, cioè se $3 < 5$ i loro opposti risultano $-3 > -5$:

1. Aggiungendo ad ambo i membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione contenente l'incognita si ottiene una disequazione equivalente.
   Questa proprietà permette di spostare un termine da un membro all'altro cambiandolo di segno.

2. Moltiplicando entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero positivo si ottiene una disequazione equivalente; moltiplicando per uno stesso numero negativo si ottiene una disequazione equivalente di verso opposto.

Disequazioni di 1° grado

Tutte le disequazioni intere di 1° grado possono essere ridotte, dopo aver svolto le operazioni presenti, alla forma normale

$$ax+b>0 \quad o \quad ax+b<0$$

Applicando le due proprietà ricordate è possibile trasformarle nelle forme equivalenti, supponendo $a > 0$, (nel caso fosse negativo basterebbe invertire il senso della disequazione e cambiare di segno)

$$\begin{array}{ccc} ax > -b \quad o \quad ax < -b & prima\, proprieta' \\ x > -\frac{b}{a} \quad o \quad x < -\frac{b}{a} & seconda\, proprieta' \end{array}$$

In generale, dato un binomio $ax+b$, si potranno avere i tre casi

1. polinomio positivo se $x > -\frac{b}{a}$

2. polinomio nullo se $x = -\frac{b}{a}$

3. polinomio negativo se $x < -\frac{b}{a}$

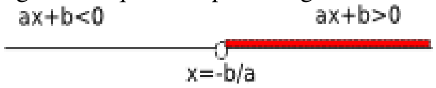
Queste condizioni, che riassumono la legge di tricotomia, possono anche essere rappresentate graficamente su una retta orientata, adottando la seguente convenzione grafica:

1. tratto normale per l'intervallo in cui il binomio è < 0

2. cerchietto per il valore in cui il binomio è $= 0$

3. tratto rinforzato per l'intervallo in cui il binomio è > 0

Nel caso generale quindi si può disegnare come in figura



Esercizi svolti

Esercizio 1. Risolvi la seguente disequazione con coefficienti interi

$$7x-11<4x+3$$

Soluzione. Trasportiamo i termini contenenti la x al primo membro e al secondo i termini noti, cambiando i rispettivi segni

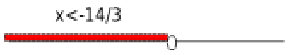
$$7x-4x<3+11$$

sommando i termini simili

$$3x<14$$

dividendo entrambi i membri per 3, si ha

$$x<\frac{14}{3}$$

Rappresentazione grafica della soluzione: 

Scriviamo la soluzione anche mediante l'insieme: $x \in \left]-\infty; \frac{14}{3}\right[$ (dove la doppia parentesi tonda indica un intervallo aperto sia a sinistra sia a destra)

Esercizio 2. Risolvi

$$2(3-2x)-4(x-4)<7x$$

Soluzione. Eseguiamo le moltiplicazioni

$$6-4x-4x+16<7x$$

trasportiamo i termini

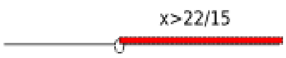
$$-4x-4x-7x<-6-16$$

sommiamo i termini simili

$$-15x<-22$$

dividiamo per -15 e cambiamo il verso della disequazione

$$x>\frac{22}{15}$$

Rappresentazione grafica: 

Intervallo: $x \in \left]\frac{22}{15}; +\infty\right[$

Esercizio 3. Risolvi la disequazione con coefficienti razionali

$$\frac{x-3}{2}-\frac{1-x}{3}\geq 2x-3$$

il mcm tra i denominatori è 6; moltiplichiamo quindi per 6 entrambi i membri

$$3(x-3)-2(1-x)\geq 12x-18$$

moltiplichiamo

$$3x-9-2+2x\geq 12x-18$$

trasportiamo e sommiamo

$$-7x\geq -7$$

risolviamo

$$x\leq 1$$

Rappresentazione grafica: 

Intervallo: $x\in\,]-\infty;1]$; dove la parentesi quadra indica un intervallo chiuso a destra.

Esercizio 4. Risolvi la disequazione riducibile a primo grado

$$\frac{x}{4}-16+18x>x\left(x+\frac{1}{4}\right)-(x-9)^2$$

Eseguiamo moltiplicazioni e potenze

$$\frac{x}{4}-16+18x>x^2+\frac{x}{4}-x^2+18x-81$$

i termini $\frac{x}{4}$ e 18x compaiono uguali in due membri diversi, x^2 e $-x^2$ sono opposti e nello stesso membro e perciò si annullano; rimarrà, trasportando

$$-16>-81$$

questa si presenta come un semplice confronto tra numeri; è facile vedere che la relazione è sempre vera. Scriveremo quindi come soluzione $\forall x\in\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Risolvi la seguente equazione con coefficienti letterali, discutendone le soluzioni al variare del parametro:

$$(1-2k)x+k+2<0$$

Soluzione. per risolvere rispetto a x, è necessario dividere per il coefficiente $(1-2k)$ della stessa incognita. Tale coefficiente, al variare di k, può assumere valori positivi, negativi o nulli.
Studiamo quindi, preliminarmente, il segno di tale coefficiente:

1. $1-2k>0$ per $k<\frac{1}{2}$; in questo caso si divide per un numero positivo e la soluzione diviene:

   $$x<\frac{-k-2}{1-2k}=\frac{k+2}{2k-1}$$

   moltiplicando Num. e Den. per -1;

2. $1-2k=0$ per $k=\frac{1}{2}$; in questo caso, non essendo possibile dividere per 0, la disequazione diviene *impossibile*;

3. $1-2k<0$ per $k>\frac{1}{2}$; in questo caso si divide per un numero negativo, cosa possibile cambiando però anche il verso della disequazione. Per cui

   $$x>\frac{-k-2}{1-2k}=\frac{k+2}{2k-1}$$

Disequazioni Frazionarie

Sono dette disequazioni fratte, le disequazioni nelle quali il confronto avviene tra polinomi fratti che presentano la lettera incognita al denominatore. Affrontare queste disequazioni vuol dire trasformarle nel confronto tra una frazione polinomiale e lo zero, studiare cioè il segno della frazione. Per fare ciò è necessario preliminarmente eseguire tutte le trasformazioni sulla disequazione di partenza eseguendo le opportune operazioni tra frazioni algebriche. Ad esempio:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < \frac{T(x)}{V(x)}$$

si trasforma in

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{T(x)}{V(x)} < 0$$

poi si esegue la somma tra frazioni, calcolando il minimo comune multiplo

$$\frac{P(x) \cdot V(x) - T(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot V(x)} < 0$$

Nel caso di disequazioni di primo grado, il minimo comune multiplo deve essere rappresentato da un polinomio di primo grado; si avranno quindi confronti del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 1$$

che si risolvono

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - 1 < 0$$

cioè

$$\frac{P(x) - Q(x)}{Q(x)} < 0$$

Tali disequazioni si affrontano osservando che il loro esame corrisponde allo studio del segno di una frazione, a stabilire cioè quando una frazione risulta maggiore, minore o uguale a zero.

Da questa osservazione deriva che, a differenza delle equazioni, non è possibile applicare il secondo principio e liberare la disequazione dal denominatore comune, in quanto esso contribuisce in modo determinante al segno della frazione stessa.

Cosa vuol dire studiare il segno di una frazione?

Una frazione qualsiasi è positiva se numeratore e denominatore sono concordi (hanno lo stesso segno), è negativa se sono discordi (hanno segno opposto):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad se \quad \begin{array}{lll} P(x) > 0 & e & Q(x) > 0 \\ P(x) < 0 & e & Q(x) < 0 \end{array}$$

Analogamente

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad se \quad \begin{array}{lll} P(x) > 0 & e & Q(x) < 0 \\ P(x) < 0 & e & Q(x) > 0 \end{array}$$

Poiché se, come visto nella risoluzione delle disequazioni, $P(x) > 0$ in un dato sottoinsieme, allora $P(x) \leq 0$ nell'intervallo complementare, è possibile studiare una disequazione fratta seguendo il seguente procedimento:

1. Studiare il segno del numeratore e del denominatore
2. Determinare, in base alla regola dei segni, il segno della frazione
3. Selezionare le soluzioni in base alla diseguaglianza assegnata

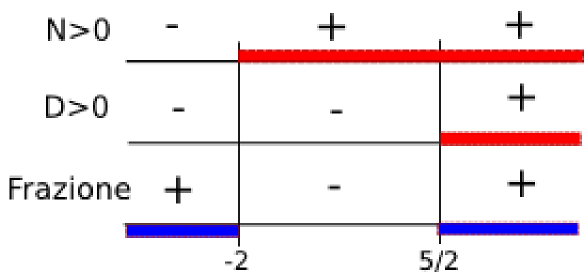
Vediamo con un esempio:

$$\frac{2x-5}{x+2} > 0$$

1. segno del numeratore e del denominatore, presi separatamente:

$$\begin{aligned} N>0 \quad 2x-5>0 \quad & per \quad x>\frac{5}{2} \\ D>0 \quad x+2>0 \quad & per \quad x>-2 \end{aligned}$$

2. Rappresentiamo tali intervalli graficamente e determiniamo il segno della frazione secondo il seguente schema,



Poiché dobbiamo determinare quando la frazione assegnata è positiva, gli intervalli saranno

$$x<-2 \quad \vee \quad x>\frac{5}{2}$$

o in notazione insiemistica

$$]-\infty;-2[\quad \cup \quad \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$$

Come si può notare, nelle disequazioni fratte non è necessario porre le condizioni di esistenza delle frazioni, in quanto queste risultano già comprese nello studio del denominatore, da cui si esclude sempre il caso uguale a zero.

[Convenzione grafica: la rappresentazione sulla retta evidenzia gli intervalli positivi con un tratto aggiuntivo, rosso in figura, quelli negativi con la sola linea della retta; se i valori, per i quali i polinomi si annullano, sono compresi nell'intervallo, si evidenziano con un pallino pieno, secondo le stesse modalità presentate nella sezione 1].

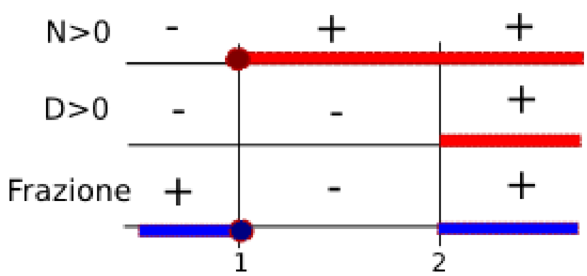
Esercizio 6. Risolvi la seguente disequazione frazionaria:

$$\frac{x-1}{x-2} \leq 0$$

Soluzione. la disequazione è già confrontata con lo zero, pertanto

$$\begin{aligned} N \geq 0 \quad x-1 \geq 0 \quad x \geq 1 \\ D>0 \quad x-2>0 \quad x>2 \end{aligned}$$

rappresentiamo graficamente sulla retta tali intervalli



La soluzione è espressa dai seguenti intervalli

$$x \leq 1 \vee x > 2$$

in forma insiemistica

$$]-\infty; 1] \cup]2; +\infty[$$

si noti come in tal modo, il valore che annulla il denominatore, venga escluso.

Esercizio 7. Risolvi la seguente disequazione:

$$\frac{6}{x-2} \geq 3$$

Soluzione. in questo caso la disequazione è scritta come confronto tra due polinomi. Applichiamo quindi i principi di equivalenza e il calcolo algebrico per ricondurre la disequazione alla forma voluta:

$$\frac{6}{x-2} - 3 \geq 0$$

$$\frac{6 - 3x + 6}{x-2} \geq 0$$

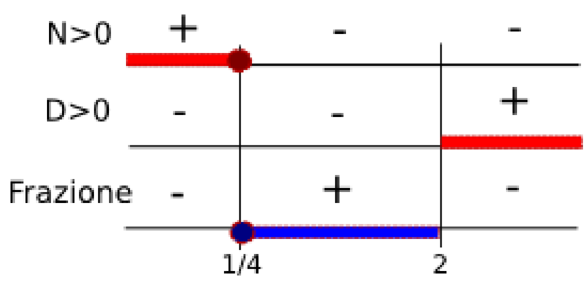
che si riduce a

$$\frac{12 - 3x}{x-2} \geq 0$$

Studiamo separatamente numeratore e denominatore

$$\begin{array}{lll} N \geq 0 & 12 - 3x \geq 0 & x \leq \frac{1}{4} \\ D > 0 & x - 2 > 0 & x > 2 \end{array}$$

rappresentiamo graficamente



La soluzione è espressa dal seguente intervallo

$$\frac{1}{4}x \leq x < 2$$

in forma insiemistica

$$\left[\frac{1}{4}; 2\right[$$

si noti come in tal modo, il valore che annulla il denominatore, venga escluso.

Esercizio 8. Risolvi
$$\frac{2x-3}{4}-\frac{3-x}{6}>\frac{5x-1}{6}-\frac{3+x}{24}-\frac{1}{6}$$

Soluzione. il minimo comune multiplo è $mcm = 24$. Moltiplichiamo pertanto tutte le frazioni per il numero positivo 24.
$$6(2x-3)-4(3-x)>4(5x-1)-(3+x)-4$$
svolgendo le operazioni
$$12x-18-12+4x>20x-4-3-x-4$$
cioè
$$16x-30>19x-11 \quad -3x>19 \quad x<-\tfrac{19}{3}$$

Esercizio 9. $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-9}{2}>\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{x-2}{6}+\dfrac{x-1}{4}\right)-\dfrac{4}{5}$

Soluzione. eseguiamo la moltiplicazione al secondo membro
$$\frac{x-2}{3}+\frac{x-9}{2}>\frac{x-2}{15}+\frac{x-1}{10}-\frac{4}{5}$$
il mcm è 30.
$$10(x-2)+15(x-9)>2(x-2)+3(x-1)-24$$
svolgendo i calcoli
$$25x-155>5x-31 \quad 20x>124 \quad x>\frac{31}{5}$$

Esercizio 10. Risolvi
$$\frac{3x-1}{4}+\frac{5-x}{2}\leq x+\frac{2}{3}-\frac{1+2x}{4}+\frac{11}{6}$$

Soluzione. il mcm è uguale a 24. Moltiplico tutti i termini per 24, ottenendo
$$6(3x-1)+12(5-x)\leq 24x+16-6(1+2x)+44$$
e svolgendo
$$6x+54\leq 12x+54 \quad -6x\leq 0 \quad x\geq 0$$

Disequazioni di Secondo grado

Le disequazioni di secondo si possono studiare in due modi, uno strettamente algebrico, l'altro associato alla rappresentazione grafica delle funzioni polinomiali di secondo grado.

Metodo algebrico: dato un polinomio di secondo grado ax^2+bx+c si chiede di studiarne il segno, determinare cioè i valori della x per i quali il polinomio assume risultati positivi, negativi o nulli. Quest'ultimo caso si identifica con la risoluzione di un'equazione di secondo grado.

- Supponiamo $a > 0$ e il polinomio scomponibile in due fattori di primo grado ($\Delta > 0$). Per il teorema di Ruffini, ciò comporta l'esistenza di due radici, di due valori della x, cioè, che annullano il polinomio. Tali valori si possono facilmente trovare risolvendo l'equazione di secondo grado associata. Indichiamo tali valori con x_1 e x_2. Il polinomio si potrà scomporre quindi

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

lo studio del segno di un tale prodotto segue le procedure delle disequazioni fratte; il prodotto di due fattori è positivo se essi sono concordi, è negativo se sono discordi. Pertanto

$$\begin{array}{ll} 1^\circ > 0 & x > x_1 \\ 2^\circ > 0 & x > x_2 \end{array}$$

componendo, si ha

$$\begin{array}{ll} P(x) > 0 & x < x_1 \vee x > x_2 \\ P(x) < 0 & x_1 < x < x_2 \end{array}$$

il primo caso si identifica con gli intervalli esterni, il secondo con l'intervallo interno alle due radici.

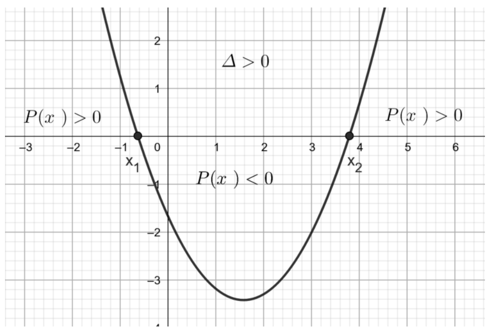
- Supponiamo $a > 0$ e il polinomio scomponibile in due fattori uguali ($\Delta = 0$), ciò è evidentemente il caso di un polinomio che è lo sviluppo del quadrato di un binomio. In tale caso il polinomio risulterà sempre positivo tranne per il valore di x che lo annulla.

- Supponiamo $a > 0$ e il polinomio irriducibile ($\Delta < 0$). In questo caso il polinomio risulterà sempre positivo.

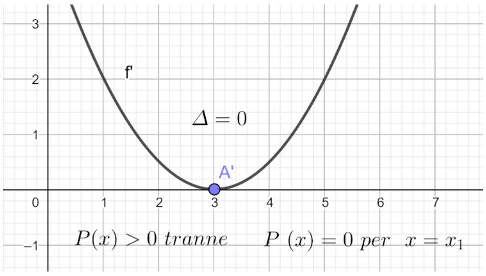
- I casi con $a < 0$ si possono facilmente ricondurre ai precedenti; basterà cambiare il segno del polinomio e invertire il verso della disequazione.

Metodo Grafico: in tale approccio si ricorre allo studio della funzione nota $y = ax^2 + bx + c$. Essa è rappresentata graficamente da una parabola le cui caratteristiche sono descritte dal variare dei parametri a, b, c. In particolare il segno di a caratterizza la cosiddetta concavità della parabola; se $a > 0$ la concavità è rivota verso l'alto, se $a < 0$ è rivolta verso il basso. Consideriamo come prima sempre il caso di $a > 0$, potendo ricondurre facilmente il caso contrario alle condizioni che verranno introdotte.

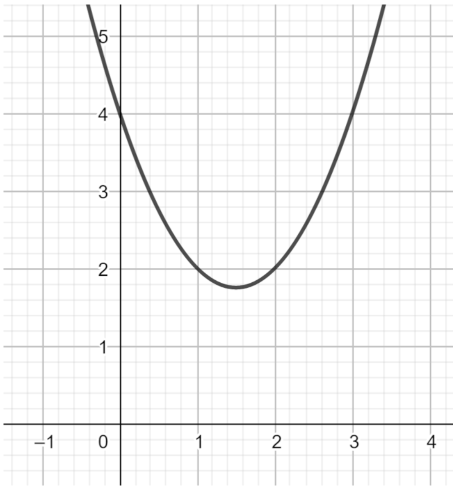
- $a > 0$, $\Delta > 0$; il polinomio ha due radici reali e distinte; la parabola pertanto interseca l'asse delle x in due punti, x_1 e x_2. (ricordiamo che la radice di un polinomio è il valore che lo annulla, cioè tutti i valori di x per i quali $y = 0$, cioè punti sull'asse delle ascisse). La parabola avrà un andamento del tipo:



- $a > 0$, $\Delta = 0$; il polinomio ha due radici reali e coincidenti; la parabola è tangente all'asse x in questo punto.



- $a > 0$, $\Delta < 0$; il polinomio non ha radici reali; la parabola assume valori sempre valori positivi per ogni valore di x.



Esercizi

Esercizio 11. Risolvi

$$(x-2)^2 + 5x < 3x - 2$$

Soluzione. Svolgiamo ed eseguiamo le operazioni indicate

$$x^2 - 4x + 4 + 5x < 3x - 2 \quad x^2 - 2x + 4 < 0$$

calcoliamo il discriminante dell'equazione, detta equivalente,

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 < 0$$

la disequazione non avrà alcuna soluzione e risulterà quindi impossibile.

Esercizio. Risolvi

$$(x-2)^2 - 2 < 8 - (x+1)^2$$

Soluzione. Svolgiamo

$$x^2-4x+4-2<8-x^2-2x-1<0 \quad 2x^2-2x-5<0$$

calcoliamo il discriminante dell'equazione

$$\frac{\Delta}{4}=1+10=11>0$$

per cui $a>0$, $\Delta>0$ e, come risulta dalla presentazione algebrica o grafica, la disequazione è soddisfatta nell'intervallo interno alle due radici del polinomio, quindi

$$1-\sqrt{11}<x<1+\sqrt{11}$$

Esercizio 12. Risolvi

$$\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}>\frac{(x-14)^2}{2}+5$$

Soluzione. il mcm è 18 e moltiplicheremo tutti le frazioni per 18 ottenendo

$$3\left(x^2-2ax+144\right)-2x+x^2-9X>9\left(x^2-28x+196\right)$$

svolgendo

$$3x^2-72x+432-2x+x^2-9x>9x^2-252x+1744+90$$

sommando e cambiando i segni

$$5x^2-169x+1422<0$$

calcoliamo il discriminante dell'equazione

$$\Delta=28561-2844010=121=11^2>0$$

per cui le radici polinomio sono $x_1=\frac{79}{5}$ e $x_2=18$, mentre le soluzioni della disequazione

$$\frac{79}{5}<x<18$$

Esercizi con disequazioni fratte

Esercizio 13. Risolvi

$$\frac{x+4}{x-3}<2$$

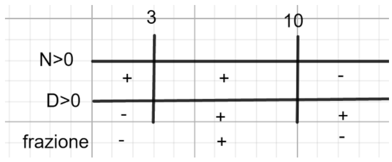
Soluzione. Riduciamo questa relazione in modo che vi sia una sola frazione confrontata con lo zero, cioè una frazione di cui si voglia sapere quando è positiva, negativa o nulla (cioè il suo ”segno”):

$$\frac{x+4}{x-3}-2<0 \quad \frac{x+4-2x+6}{x-3}<0 \quad \frac{-x+10}{x-3}<0$$

Studiamo ora il segno di questa frazione che è determinato dal confronto tra il segno del numeratore e quello del denominatore tramite la nota legge dei segni (Ricordiamo che sarebbe un errore gravissimo riscrivere questa frazione come $-x+10<0$!!).

$$\begin{array}{ll} N>0 & x<10 \\ D>0 & x>3 \end{array}$$

confrontando i segni nei vari intervalli si ha



$$x < 3 \quad \vee \quad x > 10$$

Esercizio 14. Risolvi

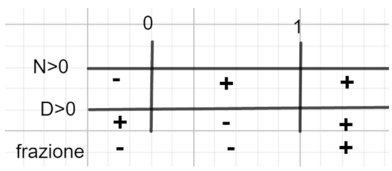
$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2 - x}$$

Soluzione. Essendo $x^2 - x$ scomponibile in $x(x-1)$, vediamo che il mcm è $mcm = x(x-1)$. Riduciamo tutte le frazioni allo stesso denominatore portandole tutte al primo membro

$$\frac{2x - x + 1 - 1}{x(x-1)} = \frac{x}{x(x-1)} \leq 0$$

Studiamo ora il segno di questa frazione: $x(x-1)$ ha due soluzioni reali, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, e dovendo essere positivo, la disequazione sarà verificata negli intervalli esterni a queste due radici

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & x > 0 \\ D > 0 & x < 0\, x > 1 \end{array}$$



La soluzione sarà

$$x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < 1$$

Esercizio 15. Risolvi

$$\frac{x+1}{x-1} + 1 \geq \frac{x-2}{x+2} + \frac{14}{5}$$

Soluzione. Il minimo comune multiplo dei denominatori è $5(x-1)(x+2)$, ma per semplicità sommiamo prima le frazioni al primo e al secondo membro

$$\frac{x+1+x-1}{x-1} \geq \frac{5x - 10 + 14x + 28}{5(x+2)}$$

avremo

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{19x+18}{5(x+2)} \geq 0$$

scriviamo ora le frazioni con lo stesso denominatore e moltiplichiamo

$$\frac{10x^2+20x-19x^2-18x+19x+18}{5(x-1)(x+2)}\geq 0$$

e riducendo e dividendo tutto per 3, si ha

$$\frac{3x^2-7x-6}{5(x-1)(x+2)}\geq 0$$

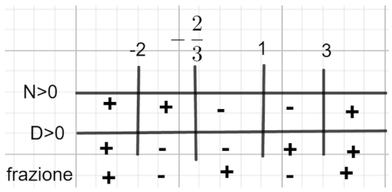
Studiamo ora il segno della frazione. Iniziamo dal numeratore la cui equazione equivalente ammette le radici

$$\Delta=49+72=121=11^2 \quad x_{1,2}=\frac{7\pm 11}{6} \quad x_1=-\frac{2}{3} \; x_2=3$$

il denominatore ha discriminante positivo e le radici sono $x_1=-2$ e $x_2=1$; possiamo risolvere ora le disequazioni

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\leq -\frac{2}{3} \; x\geq 3 \\ D>0 & x<-2 \; x>1 \end{array}$$

per cui



e le soluzioni saranno

$$-2<x\leq -\frac{2}{3} \qquad 1<x\leq 3$$

Esercizio 16. Risolvi

$$\frac{2x+1}{4x^2-9}-\frac{x}{2x+3}<\frac{x-3}{2x-3}$$

Soluzione. Osserviamo che il denominatore è una differenza di due quadrati che si può scomporre in $(2x-3)(2x+3)$, per cui il denominatore comune è $mcm=(2x-3)(2x+3)$. Portiamo tutte le frazioni al primo membro e riduciamole allo stesso denominatore

$$\frac{2x+1-x(2x-3)-(x-3)(2x+3)}{(2x-3)(2x+3)}<0$$

svolgendo si ottiene e cambiando i segni del numeratore (e quindi anche il verso della disequazione)

$$\frac{2x^2-4x-5}{(2x-3)(2x+3)}>0$$

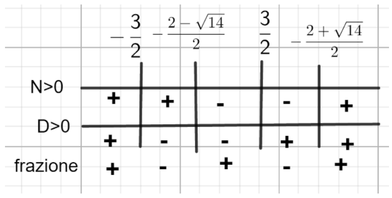
Studiamo ora il segno della frazione. Iniziamo dal numeratore la cui equazione equivalente ammette le radici

$$\frac{\Delta}{4}=4+10=14 \quad x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{14}}{2}$$

il denominatore ha discriminante positivo e le radici sono $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$; possiamo risolvere ora le disequazioni

$$\begin{array}{ll} N>0 & x<\frac{2-\sqrt{14}}{2} \; x>\frac{2+\sqrt{14}}{2} \\ D>0 & \quad x<-\frac{3}{2} \; x>\frac{3}{2} \end{array}$$

per cui



e le soluzioni saranno

$$x<-\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{2-\sqrt{14}}{2}<x<\tfrac{3}{2} \quad x>\tfrac{2+\sqrt{14}}{2}$$

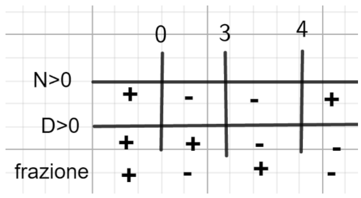
Esercizio 17. Risolvi

$$\frac{x^2-4x}{(3-x)\left(x^2+x+2\right)} \leq 0$$

Soluzione. In questo caso la disequazione non richiede calcoli preliminari. Analizziamo il numeratore: è un polinomio scomponibile in $x(x-4)$, quindi l'equazione ad esso associata avrà due soluzioni $x_1=0$ e $x_2=4$.

Soluzione 18. Il denominatore è già scomposto nel prodotto di due fattori, dove $3-x$ si annulla per $x=3$ e il polinomio di secondo grado ha il discriminante negativo e quindi sarà sempre positivo. Passando alle disequazioni avremo

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & x<0 \;\; x>4 \\ D>0 & \quad x<3 \end{array}$$



e le soluzioni saranno

$$0 \leq x<3 \qquad x \geq 4$$

Esercizio 19. Risolvi

$$\frac{1}{\left(x-\sqrt{2}\right)} \geq \frac{1}{x\sqrt{2}-2}+\frac{1}{2}$$

Soluzione. Cerchiamo prima il denominatore comune tra le frazioni. Osserviamo che $x\sqrt{2}-2=\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)$ e che $2=\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Pertanto, il denominatore comune è $2\left(x-\sqrt{2}\right)$. Riscriviamo le frazioni con lo stesso denominatore e portiamo tutto al primo membro

$$\frac{2-\sqrt{2}-\left(x\sqrt{2}+2\right)}{2\left(x-\sqrt{2}\right)} \geq 0$$

cioè,

$$\frac{4-\sqrt{2}-x\sqrt{2}}{2\left(x-\sqrt{2}\right)}\geq 0$$

Studiamo il segno della frazione attraverso quello del numeratore e del denominatore

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\leq \frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1 \\ D>0 & \qquad x>\sqrt{2} \end{array}$$

e le soluzioni saranno

$$\sqrt{2}<x\leq 2\sqrt{2}-1$$

Esercizio 20. Risolvi

$$\frac{x^2-(x+2)^2}{4-2x}\leq\frac{(x+1)^2-(x-1)(x+1)}{3x-6}$$

riscriviamo la disequazione ricordando i prodotti notevoli e le scomposizioni in fattori

$$\frac{x^2-x^2-4x-4}{2(2-x)}\leq\frac{x^2+2x+1-x^2+1}{3(x-2)}$$

scriviamo tutte le frazioni al primo membro

$$\frac{-4x-4}{2(2-x)}-\frac{2x+2}{3(x-2)}\leq 0$$

cambiamo i segni al numeratore e al denominatore della prima frazione e semplifichiamo

$$\frac{2(x+1)}{(x-2)}-\frac{2x+2}{3(x-2)}\leq 0$$

il denominatore comune sarà $3(x-2)$; riduciamo ora tutte le frazioni allo stesso denominatore

$$\frac{6x+6-2x-2}{3(x-2)}\leq 0$$

ossia

$$\frac{4x+4}{3(x-2)}\leq 0$$

Studiamo il segno della frazione attraverso quello del numeratore e del denominatore

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\geq -1 \\ D>0 & x>2 \end{array}$$

e le soluzioni saranno

$$x\leq -1 \quad x>2$$

Esercizio 21. Risolvi

$$\frac{4}{x+2}\geq 3-x$$

Soluzione. scriviamo tutte le frazioni al primo membro

$$\frac{4}{x+2}-(3-x)\geq 0$$

il denominatore comune è $x+2$; riduciamo ora tutte le frazioni allo stesso denominatore

$$\frac{4-3x-6+x^2+2x}{x+2}\geq 0$$

ossia

$$\frac{x^2-x-2}{x+2}\leq 0$$

Studiamo il segno della frazione attraverso quello del numeratore e del denominatore. Il polinomio al numeratore ha come radici $x=\frac{1\pm 3}{2}$, cioè $x_1=-1$ e $x_2=2$, per cui

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\leq -1 \vee x\geq 2 \\ D>0 & \quad x>-2 \end{array}$$

e le soluzioni saranno

$$-2<x\leq -1 \qquad x\geq 2$$

Esercizio 22. Risolvi

$$\frac{1}{2x+4}-\frac{1}{2-x}\geq -\frac{x+4}{2x+4}$$

Soluzione. riscriviamo la disequazione ricordando le scomposizioni in fattori e cambiando i segni al numeratore e al denominatore della seconda frazione

$$\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{x-2}\geq -\frac{x+4}{2(x+2)}$$

scriviamo tutte le frazioni al primo membro

$$\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{x-2}+\frac{x+4}{2(x+2)}\geq 0$$

il denominatore comune è $2(x+2)(x-2)$; riduciamo ora tutte le frazioni allo stesso denominatore

$$\frac{x-2+2x+4+(x+4)(x-2)}{x+2}\geq 0$$

ossia

$$\frac{x^2+5x-6}{2(x+2)}\geq 0$$

Studiamo il segno della frazione attraverso quello del numeratore e del denominatore. Il polinomio al numeratore ha come radici $x=\frac{-5\pm 7}{2}$, cioè $x_1=-6$ e $x_2=1$, per cui

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\leq -6 \vee x\geq 1 \\ D>0 & \quad x>-2 \end{array}$$

e le soluzioni saranno

$$x \leq -6 \quad -2 < x \leq 1 \quad x > 2$$

Esercizio 23. Risolvi

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-x} \leq \frac{2}{x+x^2}$$

Soluzione. riscriviamo la disequazione ricordando le scomposizioni in fattori e cambiando i segni al numeratore e al denominatore della seconda frazione

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{x(x-1)} \leq \frac{2}{x(x+1)}$$

scriviamo tutte le frazioni al primo membro

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{x(x+1)} \leq 0$$

il denominatore comune è $x(x+1)(x-1)$; riduciamo ora tutte le frazioni allo stesso denominatore

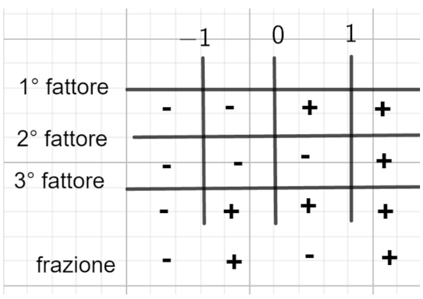
$$\frac{x+x+1-2x+2}{x(x+1)(x-1)} \leq 0$$

ossia

$$\frac{3}{x(x+1)(x-1)} \leq 0$$

Studiamo il segno del denominatore, essendo quello del numeratore sempre positivo. I tre fattori sono positivi se

$$x > 0$$
$$x > -1$$
$$x > 1$$



e le soluzioni saranno

$$x < -1 \qquad 0 < x < 1$$

Esercizio 24. Risolvi

$$x^2 \geq \frac{x^3}{2-x^2}$$

Soluzione. il denominatore comune è $2-x^2$; portiamo tutte le frazioni al primo membri scrivendole con lo stesso denominatore comune

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{x(x-1)}\leq\frac{2}{x(x+1)}$$

scriviamo tutte le frazioni al primo membro

$$\frac{2x^2-x^4-x^3}{2-x^2}\geq 0$$

il numeratore è un polinomio di quarto grado non completo e si può scomporre raccogliendo a fattor comune e cambiando i segni e il verso della disequazione

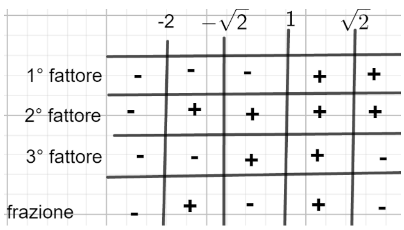
$$\frac{x^2\left(x^2+x-2\right)}{2-x^2}\leq 0$$

ossia

$$\frac{x^2(x+2)(x-1)}{2-x^2}\leq 0$$

Studiamo il segno di tutti i fattori e determiniamo poi il segno risultante con la regola dei segni

$$\begin{gathered} x\geq 0\\ x\geq 1\\ x\geq -2\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{gathered}$$



e le soluzioni saranno

$$x\leq -2\quad -\sqrt{2}<x\leq 1\quad x>\sqrt{2}$$

Sistemi di disequazioni

Esercizio 25. Risolvi

$$\begin{cases} x^2-4x\geq 0\\ 1-\frac{1}{3}x<0\end{cases}$$

Soluzione. La risoluzione di un sistema di disequazioni prevede l'individuazione delle **soluzioni comuni** alle disequazioni presenti. Pertanto, risolviamo prima le due disequazioni e confrontiamo poi le loro soluzioni per individuare gli intervalli comuni.

$$\begin{cases} x\leq 0\ \ x\geq 4\\ x>3\end{cases}$$

per cui l'intervallo comune sarà $x\geq 4$.

Esercizio 26. Risolvi

$$\begin{cases} -2x^2+8<0 \\ x^2-x-6\geq 0 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo prima le due disequazioni e confrontiamo poi le loro soluzioni per individuare gli intervalli comuni.

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x=\frac{1\pm 5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-2 \;\; x>2 \\ x\leq -2 \;\; x\geq 3 \end{cases}$$

per cui le soluzioni comuni sono

$$x<-2 \quad x\geq 3$$

Esercizio 27. Risolvi

$$\begin{cases} \frac{x-1}{4-x}\leq 0 \\ \frac{x-\sqrt{3}}{3}<\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Soluzione. Qui abbiamo anche la presenza di una disequazione fratta che va risolta come mostrato negli esercizi precedenti. Risolviamo prima questa disequazione e inseriamo poi nel sistema le soluzioni trovate.

$$\frac{x-1}{4-x}\leq 0$$

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\geq 1 \\ D>0 & x<4 \end{array}$$

le soluzioni sono $x\leq 1 \lor x>4$. Inseriamo tali soluzioni nel nostro sistema e troviamo le soluzioni anche della seconda disequazione

$$\begin{cases} x\leq 1 \lor x>4 \\ \frac{x-\sqrt{3}}{3}<\frac{x\sqrt{3}}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 1 \lor x>4 \\ x\left(1-\sqrt{3}\right)<\sqrt{3} \end{cases}$$

facciamo attenzione che $1-\sqrt{3}<0$, per cui, risolvendo, è necessario cambiare il verso della disequazione per cui, dopo aver razionalizzato

$$\begin{cases} x\leq 1 \lor x>4 \\ x>\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}+3}{2} \end{cases}$$

le soluzioni comuni sono

$$-\frac{\sqrt{3}+3}{2}<x\leq 1 \quad x>4$$

Esercizio 28. Risolvi

$$\begin{cases} 4x-1>\frac{1}{3}(x-2)+2x \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$$

Soluzione. Svolgiamo i calcoli necessari nella prima disequazione e calcoliamo le radici del polinomio al primo membro della seconda disequazione per stabilire poi gli intervalli delle soluzioni

$$\begin{cases} 12x-3>x-2+6x \\ x=\frac{3\pm 1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x>1 \\ x<1 \;\; x>2 \end{cases}$$

le soluzioni comuni sono

$$\frac{1}{5}<x<1 \qquad x>2$$

Esercizio 29. Risolvi

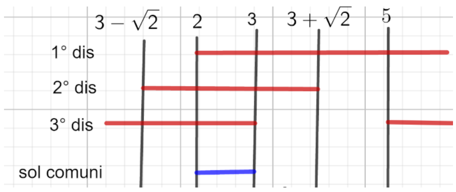
$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5} - \dfrac{2-x}{3} > 1 \\ x^2-6x+7<0 \\ x^2-8x+15>0 \end{cases}$$

Soluzione. Svolgiamo i calcoli necessari nella prima disequazione e calcoliamo le radici del polinomio al primo membro nelle altre due disequazione per stabilire poi gli intervalli delle soluzioni

$$x^2-6x+7=0 \qquad x=3\pm\sqrt{2}$$

$$x^2-8x+15=0 \qquad x=4\pm 1$$

$$\begin{cases} 6x+3-10+5x>15 \\ 3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2} \\ x<3 \;\; x>5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2 \\ 3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2} \\ x<3 \;\; x>5 \end{cases}$$



le soluzioni comuni sono

$$2<x<3$$

Esercizio 30. Risolvi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} \geq 0 \\ 2x^2-3x-5 \leq 0 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo la disequazione fratta e calcoliamo le radici del polinomio al primo membro nelle seconda disequazione per stabilire poi gli intervalli delle soluzioni

$$\frac{x}{x^2-1} \geq 0$$

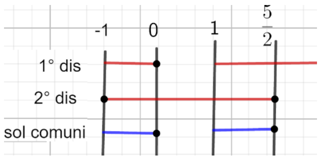
$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & x \geq 0 \\ D>0 & x<-1 \;\vee\; x>1 \end{array}$$

le soluzioni sono $-1<x\leq 0, x>1$;

$$2x^2-3x-5=0 \qquad x=\frac{3\pm 7}{4}$$

e le soluzioni sono $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$

$$\begin{cases} -1<x\leq 0,\; x>1 \\ -1\leq x\leq \frac{5}{2} \end{cases}$$



le soluzioni sono $-1 < x \leq 0$ e $1 < x \leq \frac{5}{2}$.

Esercizio 31. Risolvi

$$\begin{cases} x > \dfrac{2}{x} \\ 5x - x^2 > 0 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo la disequazione fratta e calcoliamo le radici del polinomio al primo membro nelle seconda disequazione per stabilire poi gli intervalli delle soluzioni

$$x - \frac{2}{x} > 0 \quad \frac{x^2 - 2}{x} > 0$$

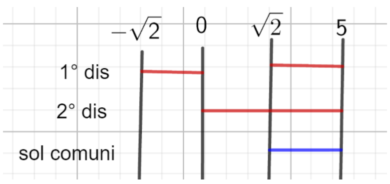
$$\begin{array}{ll} N > 0 & x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ D > 0 & x > 0 \end{array}$$

le soluzioni sono $-\sqrt{2} < x < 0, x > \sqrt{2}$;

$$5x - \ x^2 = 0 \quad x(5 - x) = 0 \quad x_1 = 0,\ x_2 = 5$$

e le soluzioni sono $0 < x < 5$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} < x < 0,\ x > \sqrt{2} \\ 0 < x < 5 \end{cases}$$



le soluzioni sono $\sqrt{2} < x < 5$.

Esercizio 32. Risolvi

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt{5} < 6 \\ \dfrac{x\sqrt{2}}{x+1} > -\dfrac{2x\sqrt{2}}{x^2 + 3x + 2} \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo la disequazione fratta e calcoliamo le radici del polinomio di secondo grado per stabilire poi gli intervalli delle soluzioni

$$\frac{x\sqrt{2}}{x+1}+\frac{2x\sqrt{2}}{(x+1)(x+2)}>0 \quad \frac{x\sqrt{2}(x+2)+2x\sqrt{2}}{(x+1)(x+2)}>0 \quad \frac{x^2+4x}{(x+1)(x+2)}>0$$

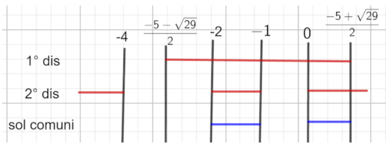
$$\begin{array}{ll} N>0 & x<-4 \vee x>0 \\ D>0 & x<-2 \vee x>1 \end{array}$$

le soluzioni sono $x<-4 \;\vee\; -2<x<-1 \;\vee\; x>0$

$$x^2+x\sqrt{5}-6=0 \quad x=\frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{29}}{2} \quad x_1=\tfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2},\; x_2=\tfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$$

e le soluzioni sono $\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$ e il sistema diviene

$$\begin{cases} x<-4 \;\vee\; -2<x<-1 \;\vee\; x>0 \\ \frac{-\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$



le soluzioni sono $-2<x<-1 \;\vee\; 0<x<\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$.

Disequazioni Irrazionali

Il calcolo ha come obiettivo di riportare la relazione iniziale a una disequazione razionale mediante elevamenti a potenza. È necessario però tenere conto delle relazioni che descrivono le condizioni di esistenza delle radici. Si possono distinguere due casi:

Caso 1. la disequazione si può ricondurre alla forma $\sqrt{A(x)}<B(x)$; in tal caso, affinché la radice abbia significato, deve essere $A(x)\geq 0$. Inoltre, restituendo la radice un valore positivo, affinché la relazione abbia senso, anche $B(x)$ deve essere positivo.Poiché i due membri della disequazione sono non negativi, quindi elevandoli al quadrato, si ottiene una disequazione equivalente. Riassumendo i valori che rappresentano le soluzioni sono gli intervalli comuni delle disequazioni sotto

$$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)>0 \\ A(x)<[B(x)]^2 \end{cases}$$

Caso 2. la disequazione si può ricondurre alla forma $\sqrt{A(x)}>B(x)$; in questo caso la modalità risolutiva deve tenere conto di due possibilità:

1. $B(x)<0$ con il primo membro che deve essere reale; la disequazione è soddisfatta perché il radicale è sempre positivo e in tal caso le soluzioni sono quelli comuni del sistema

$$\begin{cases} A(x)\geq 0 \\ B(x)<0 \end{cases}$$

2. $B(x) > 0$; in questo caso, stabilita l'esistenza del primo membro, oltre alla condizione che il secondo membro sia pure positivo, è necessario confrontare i due membri elevandoli al quadrato. Le soluzioni si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Le soluzioni trovate tramite i due sistemi vanno poi unite, in senso insiemistico, tra loro.

Esercizio 33. Risolvi

$$\sqrt{x+1} < 3$$

Soluzione. In questo caso il secondo membro è un numero positivo, per cui basta considerare porre le condizioni di esistenza della radice ed elevare al quadrato

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 < 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 8 \end{cases}$$

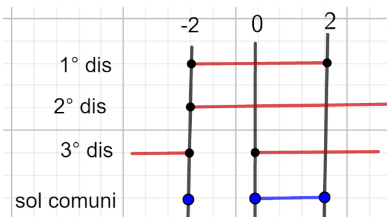
le soluzioni sono rappresentate dall'intervallo $-1 \leq x < 8$.

Esercizio 34. Risolvi

$$\sqrt{4-x^2} \leq x+2$$

Soluzione. Seguiamo la procedura illustrata sopra per questo caso

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 4-x^2 \leq x^2+4x+4 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ 2x^2+4x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ x \leq -2 \;\; x \geq 0 \end{cases}$$



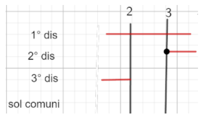
le soluzioni sono $0 \leq x < 2$, $x = -2$.

Esercizio 35. Risolvi

$$\sqrt{x^2-4x+5} < x-3$$

Soluzione. Seguiamo la procedura illustrata sopra per questo caso

$$\begin{cases} x^2-4x+5 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x^2-4x+5 \leq x^2-6x+9 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq 3 \\ 2x < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq 3 \\ x < 2 \end{cases}$$



il sistema non ha soluzioni comuni e la disequazione risulta impossibile.

Esercizio 36. Risolvi

$$\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2}}<1$$

Soluzione. In questo caso il radicando è una frazione, mentre il secondo membro è un numero positivo. Seguiamo una procedura semplificata

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2}\geq 0 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2}<1 \end{cases}$$

Studiamo la prima disequazione fratta per scrivere poi le soluzioni nel sistema

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2}\geq 0$$

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x\leq 1 \;\; x\geq 2 \\ D>0 & \quad \forall x\neq 0 \end{array}$$

le soluzioni sono $x<0$, $0<x\leq 1$, $x\geq 2$;

studiamo la seconda disequazione fratta

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2}<1 \quad \frac{x^2-3x+2}{x^2}-1<0 \quad \frac{-3x+2}{x^2}<0$$

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x<\frac{2}{3} \\ D>0 & \forall x\neq 0 \end{array}$$

le soluzioni sono $x>\frac{2}{3}$. Il sistema diviene

$$\begin{cases} x<0 \;\vee\; 0<x\leq 1 \;\vee\; x\geq 2 \\ x>\frac{2}{3} \end{cases}$$

le soluzioni sono $\frac{2}{3}<x\leq 1 \;\vee\; x\geq 2$

Esercizio 37. Risolvi

$$\sqrt{\frac{x}{x-1}}<\frac{x-2}{x}$$

Soluzione. Seguiamo la procedura presentata

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}\geq 0 \\ \dfrac{x-2}{x}>0 \\ \dfrac{x}{x-1}<\dfrac{x^2-4x+2}{x^2} \end{cases}$$

Studiamo la prima disequazione fratta per scrivere poi le soluzioni nel sistema

$$\frac{x}{x-1} \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & x \geq 0 \\ D > 0 & x > 1 \end{array}$$

le soluzioni sono $x \leq 0 \vee x \geq 1$

studiamo la seconda disequazione fratta

$$\frac{x-2}{x} > 0$$

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > 2 \\ D > 0 & x > 0 \end{array}$$

le soluzioni sono $x < 0 \vee x > 2$

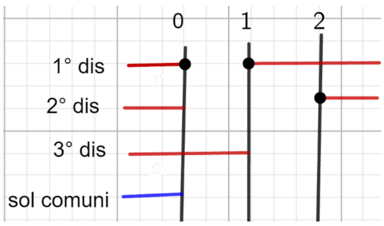
studiamo infine la terza disequazione, dopo qualche calcolo

$$\frac{x}{x-1} < \frac{x^2-4x+4}{x^2} \quad \frac{x^3-x^3+4x^2-4x+x^2-4x+4}{x^2(x-1)} < 0 \quad \frac{5x^2-8x+4}{x^2(x-1)} < 0$$

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 & x > 1 \end{array}$$

le soluzioni sono $x < 1$ con $x \neq 0$ Il sistema diviene

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x < 0 \vee x > 2 \\ x < 1 \;\; x \neq 0 \end{cases}$$



le soluzioni sono $x < 0$

Esercizio 38. Risolvi

$$\sqrt{x-1} > 3-x$$

Soluzione. Seguiamo la procedura presentata

$$1^\circ \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x < 0 \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 > 9-6x+x^2 \end{cases}$$

$$1^\circ \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} x \leq 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema 1° sono $x > 3$

le soluzioni del sistema 2° sono $2 < x \leq 3$

l'unione delle due soluzioni dà

$$x > 2$$

Esercizio 39. Risolvi

$$\sqrt{x^2 - 2x} > x - 1$$

Soluzione. Seguiamo la procedura presentata

$$1^\circ \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x > x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$1^\circ \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1 \\ x < 1 \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} x \geq 1 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema 1° sono $x \leq 0$

le soluzioni del sistema 2° sono $\nexists x \in \mathbb{R}$

l'unione delle due soluzioni dà $x \leq 0$.

Esercizio 40. Risolvi

$$\sqrt{x - 3} \geq \frac{x - 3}{2}$$

Soluzione. Seguiamo la procedura presentata

$$1^\circ \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \dfrac{x - 3}{2} < 0 \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} \dfrac{x - 3}{2} \geq 0 \\ 4x - 12 \geq x^2 - 6x + 9 \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 10x + 21 \leq 0 \end{cases}$$

$$1^\circ \begin{cases} x \geq 3 \\ x < 3 \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} x \geq 3 \\ 3 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema 1° sono $\nexists x \in \mathbb{R}$

le soluzioni del sistema 2° sono $3 \leq x \leq 7$

l'unione delle due soluzioni dà $3 \leq x \leq 7$.

Esercizio 41. Risolvi

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+8}}>0$$

Soluzione. Seguiamo una procedura semplificata

$$\frac{x^2-1}{x^3+8}>0$$

$$\begin{array}{lll} N>0 & x^2-1>0 & x<-1 \ \vee x>1 \\ D>0 & x^3+8>0 & x>-2 \end{array}$$

le soluzioni sono $-2<x<-1 \ \vee \ x>1$.

Esercizio 42. Risolvi

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}}>\frac{x+2}{x+4}$$

Soluzione. Seguiamo la procedura presentata

$$1^\circ \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}\geq 0 \\ \dfrac{x+2}{x+4}<0 \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+4}\geq 0 \\ \dfrac{x}{x+1}>\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^2 \end{cases}$$

- risolviamo le disequazioni fratte nel primo sistema

$$\frac{x}{x+1}\geq 0$$

$$\begin{array}{lll} N\geq 0 & x\geq 0 & \\ D>0 & x+1>0 & x>-1 \end{array}$$

le soluzioni sono $x<-1 \ \vee \ x\geq 0$.

$$\frac{x+2}{x+4}<0$$

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & x>2 \\ D>0 & x>-4 \end{array}$$

le soluzioni sono $-4<x<2$. Il primo sistema diviene

$$1^\circ \begin{cases} x<-1 \ \vee \ x\geq 0 \\ -4<x<2 \end{cases}$$

le soluzioni sono $-4<x<-1 \ \vee \ 0\leq x<2$.

- risolviamo le disequazioni fratte nel secondo sistema

$$\frac{x+2}{x+4}\geq 0$$

$$N \geq 0 \quad x \geq -2$$
$$D > 0 \quad x > -4$$

le soluzioni sono $x < -4 \ \vee \ x \geq -2$.

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x^2+4x+4}{x^2+8x+16} > 0 \quad \frac{x^3+8x^2+16x-x^3-4x^2-4x-x^2-4x-4}{(x+1)(x+4)^2} > 0 \quad \frac{3x^2+8x-4}{(x+1)(x+4)^2} > 0$$

$$N > 0 \quad x < \tfrac{-4-2\sqrt{7}}{3} \vee x > \tfrac{-4+2\sqrt{7}}{3}$$
$$D > 0 \quad x > -1$$

le soluzioni sono $\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} < x < -1 \ \vee \ x > \frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$. Il secondo sistema diviene

$$2^\circ \begin{cases} x < -4 \ \vee \ x \geq -2 \\ \frac{-4-2\sqrt{7}}{3} < x < -1 \ \vee \ x > \frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

le soluzioni sono $\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} < x < -1 \ \vee \ x > \frac{-42\sqrt{7}}{3}$.

Unendo ora le soluzioni dei due sistemi $-4 < x < -1 \ \vee \ 0 \leq x < 2$ e $\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} < x < -1 \ \vee \ x > \frac{-42\sqrt{7}}{3}$ avremo

$$-4 < x < -1 \ \vee \ x > \frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$$

Esercizio 43. Risolvi

$$\sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

Soluzione. Le radici di ordine dispari possono avere radicandi sia positivi che negativi, per cui la soluzione si ottiene elevando entrambi i membri alla potenza opportuna,

$$x^2-1 > 8 \quad x^2-9 > 0$$

le soluzioni sono $x < -3 \ \vee \ x > 3$.

Esercizio 44. Risolvi

$$\sqrt[3]{x^3-x} > x+2$$

Soluzione. Le radici di ordine dispari possono avere radicandi sia positivi che negativi, per cui la soluzione si ottiene elevando entrambi i membri alla potenza opportuna, e ricordando i prodotti notevoli

$$x^3-x > x^3+6x^2+12x+8 \quad 6x^2+13x+8 < 0$$

il discriminante della equazione associata è negativo ($\Delta = 169-192 < 0$) per cui la disequazione non avrà soluzioni e risulterà quindi impossibile.

Esercizio 45. Risolvi

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-2}<\sqrt{x+4}$$

Soluzione. In questo caso abbiamo più radicali e la risoluzione passa attraverso l'individuazione delle condizioni di esistenza delle radici e successivamente elevando alla potenza opportuna i membri della disequazione, risolvendo di volta in volta la relazione trovata con le modalità presentate. Sono quindi metodi risolutivi annidati.

$$C.E.\begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

la soluzione del sistema in questo caso è rappresentata dalla relazione più "restrittiva" dovendo essere comune a tutte. Pertanto

$$C.E: \ x \geq 2$$

eleviamo ora al quadrato, ricordando i prodotti notevoli

$$x+x-2+2\sqrt{x(x-2)}<x+4$$

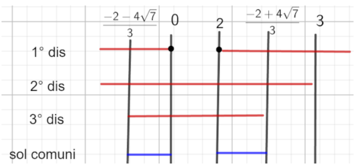
cioè

$$2\sqrt{x(x-2)}<6-x$$

risolviamo questa disequazione con la procedura presentata

$$\begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ 6-x>0 \\ 4x^2-8x<36-12x+x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \lor x \geq 2 \\ x<3 \\ 3x^2+4x-36<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \lor x \geq 2 \\ x<3 \\ \dfrac{-2-4\sqrt{7}}{3}<x<\dfrac{-2+4\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

le soluzioni sono



Confrontiamo ora tale soluzione con le condizioni di esistenza, cioè $x \geq 2$ e avremo

$$2 \leq x<\frac{-2+4\sqrt{7}}{3}$$

Esercizio 46. Risolvi

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}>\sqrt{4-x}-\sqrt{x}$$

Soluzione. In questo caso abbiamo più radicali e la risoluzione passa attraverso l'individuazione delle condizioni di esistenza delle radici e successivamente elevando alla potenza opportuna i membri della disequazione, risolvendo di volta in volta la relazione trovata con le modalità presentate. Sono quindi metodi risolutivi annidati.

$$C.E.\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

la soluzione del sistema è $1 \leq x \leq 3$ e in questo intervallo tutte le radici sono positive. Pertanto

$$C.E: 1 \leq x \leq 3$$

eleviamo ora al quadrato, e riscriviamo la disequazione come somma di radici e ricordando i prodotti notevoli

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x} > \sqrt{4-x}+\sqrt{x-1}$$

$$3\cancel{-x+x}+2\sqrt{3x-x^2} > 4\cancel{-x+x}-1+2\sqrt{-x^2+5x-4}$$

cioè,

$$\sqrt{3x-x^2} > \sqrt{-x^2+5x-4}$$

risolviamo questa nuova disequazione dove il $C.E.$ è lo stesso

$$3x-x^2 > -x^2+5x-4 \qquad 2x < 4$$

cioè

$$x < 2$$

mettendo a sistema il campo di esistenza con questa soluzione si ha

$$1 \leq x < 2$$

Esercizio 47. Risolvi

$$\frac{x^2-25}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}} \geq 0$$

Soluzione. In questo caso abbiamo più radicali al denominatore e la risoluzione passa attraverso l'individuazione delle condizioni di esistenza delle radici e successivamente studiando il segno della frazione.

$$C.E. \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{x^2-1} \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1 \\ --- \end{cases}$$

studiamo la relazione che contiene i radicali.

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1} \neq 0$$

spostiamo un radicale al secondo membro per poi elevare al quadrato

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 \neq \left(-\sqrt{x^2-1}\right)^2$$

$$x \neq x^2-1 \quad x^2-x-1 \neq 0 \quad x \neq \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

riprendiamo le C.E.,

$$C.E. \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ x \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad x \geq 1 \ \vee \ x \neq \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

studiamo ora il segno della frazione

$$N \geq 0 \qquad x \leq -5 \ \vee \ x \geq 5$$

$$D > 0 \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1 \\ \sqrt{x^2-1} > -\sqrt{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad x \geq 1$$

la frazione sarà quindi non negativa, confrontando quanto ottenuto con le C.E., per

$$x \geq 5$$

Valori assoluti

Equazioni

Ricordiamo la definizione di valore assoluto di un numero reale

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

nel caso di una espressione algebrica basta sostituire a x, $f(x)$ e avremo

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Per i valori assoluti valgono le proprietà

1. $|-x| = |x|$
2. $|x|^2 = x^2$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$ per i radicali algebrici
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (la cosiddetta disuguaglianza triangolare)
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
7. se $|x| = |y|$, allora $x = \pm y$

Esercizio 48. Determina le soluzioni dell'equazione con l'incognita all'interno di un valore assoluto

$$|x-1| = 3$$

Soluzione. Per risolvere questo caso possiamo utilizzare la proprietà 7, per cui

$$x - 1 = \pm 3$$

si ha pertanto, $x = -2$ e $x = 4$.

Esercizio 49. Risolvi

$$\left|x^2 - 5x + 4\right| = 0$$

Soluzione. In questo caso possiamo riscrivere come $x^2 - 5x + 4 = 0$ (lo zero non può avere il doppio segno), per cui

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 4$$

Esercizio 50. Risolvi

$$\left|(x-1) + (x-2)^2\right| = 3$$

Soluzione. Svolgiamo prima le operazioni dentro il valore assoluto

$$\left|x-1+x^2-4x+4\right| = \left|x^2-3x+3\right| = 3$$

per cui

$$x^2-3x+3 = \pm 3$$

Risolviamo i due casi: primo caso

$$x^2-3x+3=3 \quad x^2-3x=0 \quad x_1=0 \;\; x_2=3$$

secondo caso

$$x^2-3x+3=-3 \quad x^2-3x+6=0 \quad \not\exists sol\ reali$$

Esercizio 51. Risolvi

$$\left|x^2-2x\right| = 3x$$

Soluzione. In questo caso anche il secondo membro è un polinomio funzione di x e dovremo quindi considerare il caso in cui l'argomento del valore assoluto è positivo, x^2-2x, o negativo $-x^2+2x$. Studiamo pertanto il segno dell'argomento del valore assoluto: sarà positivo se

$$x^2-2x \geq 0 \qquad x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2$$

sarà negativo se $x^2-2x<0 \qquad 0<x<2$. Studiamo i due casi

$$\begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2 \\ x^2-2x=3x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2 \\ x^2-5x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2 \\ x_1=0 \;\; x_2=5 \end{cases}$$

le soluzioni accettabili negli intervalli indicati sono pertanto $x_1=0$ e $x_2=0$.

Secondo caso

$$\begin{cases} 0<x<2 \\ -x^2+2x=3x \end{cases} \quad \begin{cases} 0<x<2 \\ x^2+x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0<x<2 \\ x_1=-1 \;\; x_2=0 \end{cases}$$

l'unica soluzione accettabile è pertanto $x=0$. L'unione delle soluzioni dei due casi sarà $x=0$ e $x=5$.

Esercizio 52. Risolvi

$$\left|x^2-2x+3\right| = x+1$$

Soluzione. Studiamo pertanto il segno dell'argomento del valore assoluto: il discriminante del polinomio è minore di zero per cui

$$x^2-2x+3>0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

avremo solo una condizione

$$x^2-2x+3=x+1$$

cioè

$$x^2-3x+2=0$$

le cui soluzioni sono $x=1$ e $x=2$.

Esercizio 53. Risolvi
$$|x-2| = |1-2x|$$

Soluzione. Per le proprietà prima illustrate, se $|P(x)| = |Q(x)|$ allora $P(x) = \pm Q(x)$. Pertanto

$$\begin{array}{cc} x-2 = 1-2x & x-2 = 2x-1 \\ x = 1 & x = -1 \end{array}$$

Esercizio 54. Risolvi
$$\left|x^2-2\right| = \left|x^2-x+2\right|$$

Soluzione. Come prima, , se $|P(x)| = |Q(x)|$ allora $P(x) = \pm Q(x)$. Pertanto

$$\begin{array}{cc} x^2-2 = x^2-x+2 & x^2-2 = -x^2+x-2 \\ x = 4 & 2x^2-x = 0 \\ & x = 0,\ x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Esercizio 55. Risolvi
$$|2x+1| = \left|(x+1)^2-(x-1)^2\right|$$

Soluzione. Svolgiamo prima i calcoli relativi all'argomento del secondo valore assoluto.

$$|2x+1| = \left|x^2+2x+1-x^2+2x-1\right| = |4x|$$

Pertanto

$$\begin{array}{cc} 2x+1 = 4x & 2x+1 = -4x \\ x = \frac{1}{2} & x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

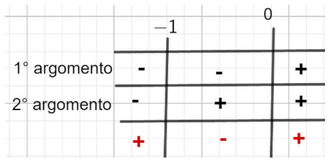
Esercizio 56. Risolvi
$$|x|+|x+1| = 2-x^2$$

Soluzione. In questo caso abbiamo due valori assoluti confrontati con una espressione che ne è priva. È necessario calcolare i segni degli argomenti di questi valori assoluti e studiare l'equazione in tutti questi intervalli. Studiamo il segno di x

$$x \geq 0$$

Studiamo il segno di $x+1$
$$x+1 \geq 0 \quad x \geq -1$$

Confrontiamo i segni come nel caso delle disequazioni fratte



Dobbiamo studiare l'equazione nei tre intervalli:

Caso 1. $x \leq -1$; si ha $|x| = -x$ e $|x+1| = -x-1$, per cui

$$-x-x-1 = 2-x^2 \qquad x^2-2x-3 = 0$$

cioè $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$; accettabile solo $x = -1$

Caso 2. $-1 < x < 0$; si ha $|x| = -x$ e $|x+1| = x+1$, per cui

$$-x+x+1 = 2-x^2 \qquad x^2-1 = 0$$

nessuna soluzione accettabile

Caso 3. $x \geq 0$; si ha $|x| = x$ e $|x+1| = x+1$, per cui

$$x+x+1 = 2-x^2 \qquad x^2+2x-1 = 0$$

cioè $x_1 = -1-\sqrt{2}$ e $x_2 = -1+\sqrt{2}$; accettabile solo $x = \sqrt{2}-1$.

Avremo quindi come soluzioni, $x = -1+\sqrt{2}$ e $x = -1$.

Disequazioni

Esercizio 57. Risolvi

$$\left|x^2-1\right| < -1$$

Soluzione. In questo caso la soluzione è immediata poiché il valore assoluto restituisce sempre risultati non negativi e quindi non potrà mai essere inferiore a un numero negativo.

Esercizio 58. Risolvi

$$\left|x^2-2x\right| > 0$$

Soluzione. Il valore assoluto restituisce sempre risultati non negativi, per cui la soluzione sarà rappresentata da tutti i numeri reali tranne quelli che annullano l'argomento del valore assoluto, cioè $\forall x \in \mathbb{R}, |x \neq 0, 2$.

Esercizio 59. Risolvi

$$\left|x^2-2x\right| > 3$$

Soluzione. Studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto.

$$x^2 - 2x \geq 0 \qquad x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2$$

sarà negativo se $x^2 - 2x < 0 \qquad 0 < x < 2$. Studiamo i due casi

$$\begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2 \\ x^2 - 2x > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2 \\ x_1 < -1 \ \vee \ x > 3 \end{cases}$$

le soluzioni accettabili negli intervalli indicati sono pertanto $x_1 < -1 \ \vee \ x > 3$.

Secondo caso

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ -x^2 + 2x > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \nexists sol\ reali \end{cases}$$

la disequazione è verificata per $x_1 < -1 \ \vee \ x > 3$.

Si può anche risolvere più rapidamente ricordando che $\left|x^2 - 2x\right| > 3$ equivale a

$$-3 < x^2 - 2x < 3$$

che restituisce gli stessi intervalli.

Esercizio 60. Risolvi

$$|2x - 5| < 7$$

Soluzione. La disequazione equivale a $-7 < 2x - 5 < 7$, per cui avremo

$$\begin{array}{ll} 2x - 5 > -7 & x > -1 \\ 2x - 5 < 7 & x < 6 \end{array}$$

per cui le soluzioni sono $-1 < x < 6$.

Esercizio 61. Risolvi

$$|2x + 1| \leq x + 4$$

Soluzione. Studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto.

$$2x + 1 \geq 0 \qquad x \geq -\tfrac{1}{2}$$

sarà negativo se $x < -\frac{1}{2}$. Studiamo i due casi

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 \leq x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 3 \end{cases}$$

le soluzioni accettabili negli intervalli indicati sono pertanto $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

Secondo caso

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 \leq x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ 3x \geq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

il sistema ammette le soluzioni $-\frac{5}{3} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

La disequazione è verificata dall'unione degli intervalli, cioè $-\frac{5}{3} \leq x \leq 3$.

Esercizio 62. Risolvi
$$\left|x^2-1\right|<x+1$$

Soluzione. Studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto.
$$x^2-1\geq 0 \qquad x\leq -1\ \vee\ x\geq 1$$
e sarà negativo se $-1<x<1$. Studiamo i due casi
$$\begin{cases} x\leq -1\ \vee\ x\geq 1 \\ x^2-1<x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\leq -1\ \vee\ x\geq 1 \\ x^2-x-2<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\leq -1\ \vee\ x\geq 1 \\ -1\leq x<2 \end{cases}$$
le soluzioni accettabili negli intervalli indicati sono pertanto $1\leq x<2$.

Secondo caso
$$\begin{cases} -1<x<1 \\ 1-x^2<x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1<x<1 \\ x^2+x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1<x<1 \\ x<-1\ \vee\ x>0 \end{cases}$$
il sistema ammette le soluzioni $0<x<1$

La disequazione è verificata dall'unione degli intervalli, cioè $0<x<2$.

Esercizio 63. Risolvi
$$\left|x^2-4x+3\right|>2x-6$$

Soluzione. Studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto.
$$x^2-4x+3\geq 0 \qquad x\leq 1\ \vee\ x\geq 3$$
e sarà negativo se $1<x<3$. Studiamo i due casi
$$\begin{cases} x\leq 1\ \vee\ x\geq 3 \\ x^2-4x+3>2x-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x\leq 1\ \vee\ x\geq 3 \\ x^2-6x-9>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\leq 1\ \vee\ x\geq 3 \\ \forall x\neq 3 \end{cases}$$
le soluzioni accettabili negli intervalli indicati sono pertanto $x\leq 1\ \vee\ x>3$.

Secondo caso
$$\begin{cases} 1<x<3 \\ -x^2+4x-3>2x-6 \end{cases} \quad \begin{cases} 1<x<3 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1<x<3 \\ -1<x<3 \end{cases}$$
il sistema ammette le soluzioni $1<x<3$

La disequazione è verificata dall'unione degli intervalli, cioè $\forall x\neq 3$.

Esercizio 64. Risolvi
$$|x-2|\geq|2x-1|$$

Soluzione. Dalla proprietà 7, possiamo risolvere elevando al quadrato entrambi gli argomenti dei valori assoluti.
$$x^2-4x+4\geq 4x^2-4x+1 \qquad 3x^2-3\geq 0$$
cioè
$$-1\leq x\leq 1$$

Esercizio 65. Risolvi
$$2\left|x\right| > \left|x+1\right|$$

Soluzione. Dalla proprietà 7, possiamo risolvere elevando al quadrato entrambi gli argomenti dei valori assoluti.
$$4x^2 > x^2+2x+1 \qquad 3x^2-2x-1>0$$
cioè
$$x<-\frac{1}{3}\ \vee\ x>1$$

Esercizio 66. Risolvi
$$\left|x^2-2x+3\right| < \left|x^2-3x\right|$$

Soluzione. Dalla proprietà 7, possiamo risolvere elevando al quadrato entrambi gli argomenti dei valori assoluti.
$$x^4+4x^2+9-4x^3+6x^2-12x < x^4-6x^3+9x^2 \qquad 2x^3+x^2-12x+9<0$$
scomponiamo questa equazione di terzo grado; osserviamo che $P(1)=0$, per cui applicando la regola di Ruffini, si ottiene $(x-1)\left(2x^2+3x-9\right)<0$. Studiamo la disequazione
$$\begin{array}{ll} 1^\circ\, fattore > 0 & x>1 \\ 2^\circ\, fattore > 0 & x<-3\ \vee\ x>\frac{3}{2} \end{array}$$
gli intervalli che soddisfano alla disequazione di terzo grado sono quindi
$$x<-3\ \vee\ 1<x<\frac{3}{2}$$

Esercizio 67. Risolvi
$$\left|\frac{x-1}{2}-\frac{3x-6}{3}\right|<1$$

Soluzione. Tale disequazione equivale a
$$-1<\frac{x-3}{2}-\frac{3x-6}{3}<1$$
svolgendo i calcoli si ottiene
$$-1<\frac{3-x}{2}<1$$
cioè
$$\begin{array}{ll} 3-x>-2 & x<5 \\ 3-x<2 & x>1 \end{array}$$
le soluzioni saranno $1<x<5$.

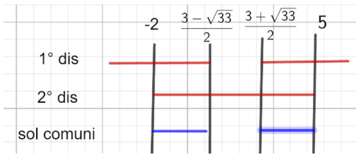
Esercizio 68. Risolvi
$$\left|x^2-3x-8\right|<2$$

Soluzione. Tale disequazione equivale a

$$-2 < x^2 - 3x - 8 < 2$$

cioè

$$\begin{array}{ll} x^2 - 3x - 6 > 0 & x < \frac{3-\sqrt{33}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{33}}{2} \\ x^2 - 3x - 10 < 0 & -5 < x < 2 \end{array}$$



le soluzioni saranno $-2 < x < \frac{3-\sqrt{33}}{2} \;\vee\; \frac{3+\sqrt{33}}{2} < x < 5$.

Esercizio 69. Risolvi

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}\right| < 2$$

Soluzione. Tale disequazione equivale a

$$-2 < \frac{2x+1}{x-3} < 2$$

cioè

$$\begin{array}{lll} \frac{2x+1}{x-3} + 2 > 0 & \frac{2x+1+2x-6}{x-3} > 0 & \frac{4x-5}{x-3} > 0 \\ \frac{2x+1}{x-3} - 2 < 0 & \frac{2x+1-2x+6}{x-3} < 0 & \frac{7}{x-3} < 0 \end{array}$$

Risolviamo la prima disequazione fratta: $\frac{4x-5}{x-3} > 0$

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > \frac{5}{4} \\ D > 0 & x > 3 \end{array}$$

le soluzioni sono $x < \frac{5}{4} \;\vee\; x > 3$

Risolviamo la seconda disequazione fratta: $\frac{7}{x-3}$ <0, essendo il numeratore sempre positivo, la disequazione è soddisfatta per $x < 3$

l'unione delle soluzioni dà $x < \frac{5}{4}$.

Esercizio 70. Risolvi

$$\frac{|x+2|-1}{x^2-3x} > 0$$

Soluzione. In questo caso il valore fa parte del numeratore di una frazione e non è quindi direttamente confrontato con un valore numerico. È quindi necessario studiare il suo argomento. Esso sarà positivo o nullo per $x \geq -2$ e negativo nell'intervallo complementare $x < -2$.

Caso 1. Avremo pertanto

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ \frac{x+1}{x^2-3x} > 0 \end{cases}$$

studiamo la disequazione fratta: $\dfrac{x+1}{x^2-3x} > 0$

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > -1 \\ D > 0 & x < 0 \ \vee \ x > 3 \end{array}$$

e soluzioni sono

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ -1 < x < 0 \ \vee \ x > 3 \end{cases}$$

e il sistema avrà come soluzioni $-1 < x < 0 \ \vee \ x > 3$

Caso 2. avremo

$$\begin{cases} x < -2 \\ \frac{-x-3}{x^2-3x} > 0 \end{cases}$$

studiamo la disequazione fratta: $\dfrac{-x-3}{x^2-3x} > 0$

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x < -3 \\ D > 0 & x < 0 \ \vee \ x > 3 \end{array}$$

e soluzioni sono

$$\begin{cases} x < -2 \\ x < -3 \ \vee \ 0 < x < 3 \end{cases}$$

e il sistema avrà come soluzioni $x < -3$

Unendo gli intervalli avremo $x < -3$, $-1 < x < 0$, $x > 3$.

Esercizio 71. Risolvi

$$\left| \frac{x}{x-1} \right| \leq 2$$

Soluzione. Studiamo l'argomento.

$$\frac{x}{x-1} \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & x > 0 \\ D > 0 & x > 1 \end{array}$$

Esso sarà positivo o nullo per $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1$ e negativo nell'intervallo complementare $0 < x < 1$.

Caso 1. Avremo pertanto

$$\begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1 \\ \frac{x}{x-1} \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1 \\ \frac{x-2x+2}{x-1} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1 \\ \frac{2-x}{x-1} \leq 0 \end{cases}$$

studiamo la disequazione fratta: $\dfrac{2-x}{x-1} > 0$

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & x \leq 2 \\ D > 0 & x > 1 \end{array}$$

e soluzioni sono

$$\begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1 \\ x < 1 \ \vee \ x \geq 2 \end{cases}$$

e il sistema avrà come soluzioni $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 2$

Caso 2. avremo

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{x}{1-x} \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{x-2+2x}{1-x} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{3x-2}{1-x} \leq 0 \end{cases}$$

studiamo la disequazione fratta: $\dfrac{3x-2}{1-x} \leq 0$

$$\begin{array}{ll} N > 0 & x \geq \frac{2}{3} \\ D > 0 & x < 1 \end{array}$$

e soluzioni sono

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \leq \frac{2}{3} \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

e il sistema avrà come soluzioni $0 < x < \frac{2}{3}$

Unendo gli intervalli avremo $x < \frac{2}{3}, x \geq 2$.